

离散广义系统的鲁棒控制器设计

谢湘生

(广东工业大学 系统工程研究所, 广东 广州 510090)

摘要: 利用二次稳定的概念, 研究了带有外部干扰的离散广义系统鲁棒控制器的设计问题. 在对系统进行二次稳定分析的基础上, 给出了系统可以鲁棒镇定的条件, 并且这一条件被表示为线性矩阵不等式(LMI)的形式, 从而控制器的设计问题可利用现有的 LMI 方法解决.

关键词: 离散广义系统; 二次稳定; 鲁棒控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP271

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2001)02-0001-05

广义系统是客观系统的一种自然表示, 与通常的系统相比可用广义系统来描述更多实际的系统特征, 如关于物理变量的静态限制、脉冲元件等^[1], 因此广义系统在化学工程、受限力学系统、复杂电网络、经济系统等中得到了广泛的应用, 它的研究也受到人们的关注. 控制理论中通常系统的许多重要结果都已推广到了广义系统中, 如可控性、可观性、LQ 问题、Lyapunov 方程等等. 最近文[2]研究了离散广义系统的镇定问题, 建立了离散广义系统的设计方法, 但文中没有考虑干扰输出. 在实际系统中必定存在不同程度的外部干扰, 而且干扰抑制通常是系统的一个重要指标, 因此研究离散广义系统存在干扰输入条件下的镇定问题有重要的实际意义. 从对通常的离散系统及连续广义系统相应问题的研究^[3, 4]可知, H_∞ 控制是研究系统干扰抑制鲁棒镇定的一种较好的方法, 其研究近年来受到人们广泛关注, 本文的目的是对带有外部扰动的离散广义系统, 利用二次稳定的概念并结合使用线性矩阵不等式(LMI)给出鲁棒控制器的设计方法.

1 离散广义系统的二次稳定性

我们首先考虑不带控制输入的离散广义系统

$$\begin{aligned} E\mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ 分别是系统的状态, 量测输出, 外部干扰变量; 又假定 E , A , B , C , D 是适当维数的常数矩阵, 且 E 可以是奇异的, 并设它们有如下的分块形式

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2]$$

其中 I 是单位矩阵, 其它子矩阵有适当的维数. 本文总假定系统(1)是正则的, 即至少存在一个复数 s , 使得 $\det(sE - A) \neq 0$.

对系统(1)引入二次稳定的概念.

收稿日期: 2000-06-26

基金项目: 广州市基础性研究计划资助项目(98-J-011-01).

作者简介: 谢湘生(1957), 男, 教授; 主要研究方向: 控制理论与应用等.

定义 1 系统(1)称为具有指定性能 γ 二次稳定的, 如果在零输入条件下它的零解是渐近稳定的, 并且对任意的 $\mathbf{w}(k) \in l_2$, 在零初始条件有如下的不等式成立

$$\|\mathbf{z}(k)\| \leq \gamma \|\mathbf{w}(k)\|.$$

为了得到系统(1)的二次稳定性, 我们需要以下著名的结果.

引理 1 (Schur 补性质) 分块矩阵

$$\begin{bmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{bmatrix}$$

负定当且仅当

$$Q < 0, P - MQ^{-1}M^T < 0;$$

或

$$P < 0, Q - M^TP^{-1}M < 0.$$

定理 1 设系统(1)是因果的. 若存在正定矩阵 P 使得下面的矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -P & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma^2 I & D^T \\ 0 & C & D & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

其中 $A = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, $C = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}$, $D = D - C_2A_{22}^{-1}B_2$, 则系统(1)是具有指定性能 γ 二次稳定的.

证明 首先将系统(1)写成如下的形式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1) &= A_{11}\mathbf{x}_1(k) + A_{12}\mathbf{x}_2(k) + B_1\mathbf{w}(k), \\ 0 &= A_{21}\mathbf{x}_1(k) + A_{22}\mathbf{x}_2(k) + B_2\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= C_1\mathbf{x}_1(k) + C_2\mathbf{x}_2(k) + D\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (3)$$

由因果性的假定, $\det(A_{22}) \neq 0^{[5]}$. 故

$$\mathbf{x}_2(k) = -A_{22}^{-1}A_{21}\mathbf{x}_1(k) - A_{22}^{-1}B_2\mathbf{w}(k).$$

于是由式(3)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1) &= A\mathbf{x}_1(k) + B\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= C\mathbf{x}_1(k) + D\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (4)$$

构造函数 $V(k) = \mathbf{x}_1^T(k)P\mathbf{x}_1(k)$. 则

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ &= \mathbf{x}_1^T(k)A^TPA\mathbf{x}_1(k) + 2\mathbf{x}_1^T(k)A^TPB\mathbf{w}(k) + \mathbf{w}^T(k)B^TPB\mathbf{w}(k) - \mathbf{x}_1^T(k)P\mathbf{x}_1(k). \end{aligned} \quad (5)$$

在零输入的条件下, 就有

$$\Delta V(k) = \mathbf{x}_1^T(k)(A^TPA - P)\mathbf{x}_1(k).$$

但由 Schur 补性质易知不等式(2)蕴涵

$$A^TPA - P < 0,$$

故此时系统(1)的零解是渐近稳定的.

为了得到二次稳定性, 定义函数

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{z}^T(k)\mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(k)\mathbf{w}(k)].$$

当 $x(0) = 0$ 时, 易见 $\sum_{k=1}^n \Delta V(k) = V(n+1) \geq 0$. 故

$$J \leq \sum_{k=1}^{\infty} [z^T(k)z(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) + \Delta V(k)] =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [x_1^T(k)C^T C x_1(k) + 2x_1^T(k)C^T D w(k) + w^T(k)D^T D w(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) - x_1^T(k)P x_1(k) +$$

$$x_1^T(k)A^T A x_1(k) + 2x_1^T(k)A^T P A x_1(k) + 2x_1^T(k)A^T P B w(k) + w^T(k)B^T P B w(k)] =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [x_1^T(k) \quad w^T(k)] W \begin{bmatrix} x_1(k) \\ w(k) \end{bmatrix},$$

其中

$$W = \begin{bmatrix} A^T P A + C^T C - P & A^T P B + C^T D \\ B^T P A + D^T C & D^T D + B^T P B - \gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

利用 Schur 补性质可知, 当式(2)满足时, $W < 0$. 从而系统(1)是指定性能 γ 二次稳定的. 证毕.

2 控制器的设计

下面考虑广义离散控制系统

$$\begin{aligned} E x(k+1) &= A x(k) + B w(k) + F u(k), \\ z(k) &= C x(k) + D w(k) + G u(k), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $u(k)$ 为系统的控制变量, F, G 是适当维数的常数矩阵, 仍假定各矩阵可像(1)中那样分块并且 $F = \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T \end{bmatrix}$.

假定系统(6)是因果可控的, 则对应的连续系统是脉冲可控的^[5], 因此 $\text{rank} \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n - r$, 其中 $r = \text{rank} E$, 因此存在可逆矩阵 M, N , 使得 $N A_{22} M = \text{diag}(I_{r_1}, 0)$, $r_1 = \text{rank} A_{22}$. 记 $N B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}$, 其中 B_{21}, B_{22} 分别为 r_1 行与 $n - r - r_1$ 行矩阵, 由 $\text{rank} \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n - r$ 可知, B_{22} 为满行秩矩阵. 故构造矩阵 $K_2 = \begin{bmatrix} 0, B_{22}^T \end{bmatrix} M$, 则 $A_{22} + F_2 K_2$ 可逆. 因而在状态反馈

$$u(k) = K_2 x_2(k) + v(k) \quad (7)$$

下, (6)的闭环系统

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11} x_1(k) + (A_{12} + F_1 K_2) x_2(k) + B_1 w(k) + F_1 v(k), \\ 0 &= A_{21} x_1(k) + (A_{22} + F_2 K_2) x_2(k) + B_2 w(k) + F_2 v(k), \\ z(k) &= C_1 x_1(k) + (C_2 + G K_2) x_2(k) + D w(k) + G v(k) \end{aligned} \quad (8)$$

是因果的. 记

$$\begin{aligned} \hat{A}_{22} &= A_{22} + F_2 K_2, \hat{A} = A_{11} - (A_{12} + F_1 K_2) \hat{A}_{22}^{-1} A_{21}, \\ \hat{B} &= B_1 - (A_{12} + F_1 K_2) \hat{A}_{22}^{-1} B_2, \hat{F} = F_1 - (A_{12} + F_1 K_2) \hat{A}_{22}^{-1} F_2, \\ \hat{C} &= C_1 - (C_2 + G K_2) \hat{A}_{22}^{-1} A_{21}, \hat{D} = D - (C_2 + G K_2) \hat{A}_{22}^{-1} B_2, \hat{G} = G - (C_2 + G K_2) \hat{A}_{22}^{-1} F_2 \end{aligned}$$

则利用式(8)可得

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \hat{A} x_1(k) + \hat{B} w(k) + \hat{F} v(k), \\ z(k) &= \hat{C} x_1(k) + \hat{D} w(k) + \hat{G} v(k). \end{aligned} \quad (9)$$

现在我们要寻找静态反馈

$$v(k) = K_1 x_1(k), \quad (10)$$

使得闭环系统

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (\hat{A} + \hat{F}K_1)x_1(k) + \hat{B}w(k), \\ z(k) &= (\hat{C} + \hat{G}K_1)x_1(k) + \hat{D}w(k) \end{aligned} \quad (11)$$

具有指定性能 γ 二次稳定.

定理 2 若存在正定矩阵 X , 及矩阵 Y 使得下面的线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -X & \hat{A}X + \hat{F}Y & \hat{B} & 0 \\ (\hat{A}X + \hat{F}Y)^T & -X & 0 & (\hat{C}X + \hat{G}Y)^T \\ \hat{B}^T & 0 & -\gamma^2 I & \hat{D}^T \\ 0 & \hat{C}X + \hat{G}Y & \hat{D} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

则在反馈 $u(k) = K_1 x_1(k) + K_2 x_2(k)$ 下, 系统(6)的闭环系统(11)是具指定性能 γ 二次稳定的, 这里 K_2 由式(7)给出, $K_1 = YX^{-1}$.

证明 由定理 1, 要使闭环系统(11)具有指定性能 γ 二次稳定, 只须对于 K_1 存在正定矩阵 P 使得下面的矩阵不等式满足:

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & \hat{A} + \hat{F}K_1 & \hat{B} & 0 \\ (\hat{A} + \hat{F}K_1)^T & -P & 0 & (\hat{C} + \hat{G}K_1)^T \\ \hat{B}^T & 0 & -\gamma^2 I & \hat{D}^T \\ 0 & \hat{C} + \hat{G}K_1 & \hat{D} & -I \end{bmatrix} < 0.$$

但注意到上式左端分别左乘和右乘分块对角矩阵 $\text{Block-diag}(I, P^{-1}, I, I)$, 并令 $X = P^{-1}$, $Y = K_1 P^{-1}$, 则由上式得到式(12). 注意上面的计算可逆, 因此定理得证. 证毕.

注意定理 2 的条件(12)是一个关于矩阵变量 X, Y 的线性矩阵不等式. 现在已有了许多关于求解线性矩阵不等式的有效算法和软件工具包(例如[6]), 利用它们求解线性不等式(12)就可得到所需要的反馈控制律. 此外, 还可利用这些工具软件优化设计, 以便对慢子系统(9)获得具有较小反馈增益参数的状态反馈控制律.

3 算例

考虑离散广义系统(6), 不妨设它的系数矩阵已具有标准形式

$$E = \text{Block-diag}(I_2, 0), A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2],$$

其中 I_2 为二阶单位矩阵, $A_{11} = \begin{bmatrix} 0.94 & -1.85 \\ 1.5 & 0.76 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.45 \\ -0.73 & 0.38 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.9 \\ 0.23 & 0.15 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} -0.39 & 0 \\ 0 & -0.78 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.09 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} -0.091 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [0.76 \quad 1.02]$, $C_2 = [0.991 \quad -1.05]$, 并

且 $D = -0.092$, $G = 1.1$.

易验证这一系统是因果可控的. 按(7)中的定义, 取 $K_2 = [0.96 \quad 0.56]$, 则在反馈(7)下, 闭环系统是因果的. 这时(9)中的诸系数矩阵分别为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.4783 & 0.0744 \\ 1.4904 & 0.4144 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.3136 \\ 0.3705 \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{bmatrix} -0.8036 \\ 0.6786 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = [-0.6614 \quad -1.9303], D = -0.5698, G = 1.8750.$$

根据定理2, 利用著名仿真软件 Matlab 中的 LmiLab 就可得, 在反馈律为

$$K_1 = [1.2901 \quad 0.4707]$$

时, 相应的闭环系统是具有性能 γ 二次稳定的, 其中 $\gamma = 1.8066$.

4 结论

本文对带有外部干扰的离散广义系统研究了鲁棒控制问题, 在对系统进行二次稳定分析的基础上, 建立了系统鲁棒可镇定的条件, 这一条件被表成了线性矩阵不等式的形式. 因此可利用凸规划方法解决系统的控制器设计问题. 给出的算例说明了文中方法的可用性.

参考文献:

- [1] Lewis F L. A survey of linear singular systems[J]. Circuit Syst. Sig. Processing, 1986, 5: 3-26.
- [2] Xu S, Yang C. Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach[J]. Automatica, 1999, 35: 1613-1667.
- [3] Jon H K, Hon B P. H^∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time delay system[J]. Automatica, 1999, 35: 1613-1451.
- [4] 谢湘生. 广义系统鲁棒镇定的 H^∞ 方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(增刊): 501-505.
- [5] Dai L. Singular Control Systems[M], 1989, New York: Springer-Verlag.
- [6] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A et al. LMI control toolbox users guide[Z]. The Mathworks, Inc. 1995.

Robust Control of Discrete-Time Singular Systems with Exogenous Disturbance

XIE Xiang-sheng

(Systems Engineering Institute, GDUT, Guangzhou 510090, China)

Abstract: Using the quadratic stability, the design of robust controller for discrete-time singular systems with exogenous disturbance is discussed in the paper. Based on the analysis of quadratic stability for the systems, a sufficient condition of robust stabilization is established in terms of linear matrix inequality. The problem of design of robust feedback controller can be solved on the basis of LMI techniques.

Key words: discrete-time singular system; quadratic stability; ; robust control; linear matrix inequality (LMI)